# Условие задачи

Предприятие производит два продукта: Х1 и Х2. Для производства каждого продукта расходуются два ресурса: R1 и R2.

Для производства единицы продукта Х1 требуется 3.8 единиц ресурса R1 и 9.8 единиц ресурса R2.

Для производства единицы продукта Х2 требуется 11.1 единиц ресурса R1 и 4.2 единиц ресурса R2.

На предприятии имеется 188.67 единиц ресурса R1 и 168.2 единиц ресурса R2.

С каждой единицы продукта Х1 предприятие получает 18.82 единиц экономического эффекта.

С каждой единицы продукта Х2 предприятие получает 16.78 единиц экономического эффекта.

Ответить на следующие вопросы.

1. Найти план, выполнение которого обеспечит наибольший экономический эффект предприятию.

2. Вычислить предельную полезность каждого ресурса.

# Решение

Математическая модель:

$$\left\{\begin{array}{c}3,8x\_{1}+11,1x\_{2}\leq 188,67,\\9,8x\_{1}+4,2x\_{2}\leq 168,2,\\x\_{1},x\_{2}\geq 0.\end{array}\right.$$

Целевая функция:

F(x1)=18.82\*x1+16.78\*x2 -> max

Построим область допустимых решений, т.е. решим графически систему неравенств. Для этого построим каждую прямую и определим полуплоскости, заданные неравенствами (полуплоскости обозначены штрихом).



или



Шаг №2. Границы области допустимых решений.

Пересечением полуплоскостей будет являться область, координаты точек которого удовлетворяют условию неравенствам системы ограничений задачи.

Обозначим границы области многоугольника решений.



Шаг №3. Рассмотрим целевую функцию задачи F = 18.82x1+16.78x2→ max.

Построим прямую, отвечающую значению функции F = 0: F = 18.82x1+16.78x2 = 0. Вектор-градиент, составленный из коэффициентов целевой функции, указывает направление максимизации F(X). Начало вектора – точка (0; 0), конец – точка (18.82; 16.78). Будем двигать эту прямую параллельным образом. Поскольку нас интересует максимальное решение, поэтому двигаем прямую до последнего касания обозначенной области. На графике эта прямая обозначена пунктирной линией.



Прямая **F(x) = const** пересекает область в точке C. Так как точка C получена в результате пересечения прямых **(1)** и **(2)**, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

3.8x1+11.1x2=188.67

9.8x1+4.2x2=168.2

Решив систему уравнений, получим: x1 = 11.5773, x2 = 13.0339

То есть максимальную прибыль предприятие получит при производстве 11.5773 единиц товара X1 и 13.0339 единиц товара X2.

При данном плане производства прибыль предприятия составит:

F(X) = 18.82\*11.5773 + 16.78\*13.0339 = 436,59 единиц экономического эффекта.

Для того, чтобы оценить предельную полезность каждого ресурса необходимо составить двойственную задачу и решить.

Математическая модель:

$$\left\{\begin{array}{c}3,8y\_{1}+9,8y\_{2}\leq 18,82,\\11,1x\_{1}+4,2x\_{2}\leq 16,78,\\x\_{1},x\_{2}\geq 0.\end{array}\right.$$

Целевая функция:

F(x1)=188,67\*y1+168,2\*y2 -> min

Для решения двойственной задачи используем вторую теорему двойственности.

Подставим оптимальный план прямой задачи в систему ограниченной математической модели:

3.8\*11.58 + 11.1\*13.03 = 188.67 = 188.67

1-ое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что 1-й ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теореме двойственности отлична от нуля (y1 > 0).

9.8\*11.58 + 4.2\*13.03 = 168.2 = 168.2

2-ое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что 2-й ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теореме двойственности отлична от нуля (y2 > 0).

Поскольку x1>0, первое ограничение в двойственной задаче будет равенством.

Поскольку x2>0, второе ограничение в двойственной задаче будет равенством.

С учетом найденных оценок, новая система примет вид:

3.8y1+9.8y2 = 18.82

11.1y1+4.2y2 = 16.78

188.67y1+168.2y2 → min

Или

3.8y1+9.8y2 = 18.82

11.1y1+4.2y2 = 16.78

188.67y1+168.2y2 → min

Решая систему графическим способом, находим оптимальный план двойственной задачи:





Прямая **F(x) = const** пересекает область в точке B. Так как точка B получена в результате пересечения прямых **(1)** и **(2)**, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

3.8y1+9.8y2=18.82

11.1y1+4.2y2=16.78

Решив систему уравнений, получим: y1 = 0.9201, y2 = 1.5637

Откуда найдем минимальное значение целевой функции:

F(X) = 188.67\*0.9201 + 168.2\*1.5637 = 436.5937

y1 = 0.92

y2 = 1.56

Z(Y) = 188.67\*0.92+168.2\*1.56 = 436.59

Таким образом, предельная полезность ресурса R1 составляет 0,92, а ресурса R2 – 1,56.